

18) Спектр линейного оператора, резольвентное множество, замкнутость спектра, тот же в Гильберта

Банах.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ наз-ся регулярной д/лин. оп-ра $A: X \rightarrow X$, if:

- 1) $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$
- 2) $R(A - \lambda E) = X$; // R -образ оп-ра //
- 3) $\exists (A - \lambda E)^{-1}$, λ определен на всех X и явл-ся огр. оп-ром.

Оп-р $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ наз-ся резольвентой

Мн-во регулар. точек оп-ра $A - \sigma(A)$ наз-ся резольвентным мн-вом

Совокуп-ть резольв. знач-й $A - \sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ наз-ся спектром оп-ра

Лемма If $A \in L(X \rightarrow X)$, X -Банах. пр-во, то из усл-й регулар. m. 1), 2) $\Rightarrow$ 3)

$A - \lambda E$ - лн. опр., $\ker(A - \lambda E) = \{0\} \Rightarrow \lambda$ таа $\forall \varphi \in \text{Fred.} \Rightarrow$ реш-е ур-я $Ax - \lambda x = y$!, оп-р $A - \lambda E$ задает взаимно-однозначн. отображе, $R(A - \lambda E) = X \Rightarrow$ это отображе всего X на все $X \Rightarrow \exists \lambda$ Банаха об обрат. оп-ре $\Rightarrow \exists (A - \lambda E)^{-1} = R_\lambda$ - опр.

Лемма If $A \in L(X \rightarrow X)$, $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \sigma(A)$

$(A - \lambda E)x = y \Leftrightarrow x - \frac{A}{\lambda}x = -\frac{y}{\lambda} \Rightarrow (E - \frac{A}{\lambda})x = -\frac{y}{\lambda}$, где $\frac{A}{\lambda} = -\frac{A}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda} = -\frac{y}{\lambda}$

Известно, что $E - \frac{A}{\lambda}$ обратим, if $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$, что сводит if $|\lambda| > \|A\|$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ - спектрал. радиус. Известно, что $\|A\| \geq r(A) \Rightarrow$ if $|\lambda| > r(A)$, то $\lambda \in \sigma(A)$

$\forall A \in L(X \rightarrow X), \lambda \in \sigma(A), |\Delta \lambda| < \frac{1}{\|R_\lambda\|}$. Тогда $(\lambda + \Delta \lambda) \in \sigma(A)$, и $\|R_{\lambda + \Delta \lambda} - R_\lambda\| \xrightarrow{\Delta \lambda \rightarrow 0} 0$

$\exists A$ - регулар. m. $\Rightarrow R_\lambda \exists$ и опр.
 $(A - (\lambda + \Delta \lambda)E)x = y \Leftrightarrow$ домножим на $R_\lambda \Leftrightarrow x - \Delta \lambda R_\lambda x = R_\lambda y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (E - \Delta \lambda R_\lambda)x = R_\lambda y$
 $|\Delta \lambda| < \frac{1}{\|R_\lambda\|} \Rightarrow \|\Delta \lambda R_\lambda\| < 1 \Rightarrow \exists (E - \Delta \lambda R_\lambda)^{-1} \Rightarrow x = (E - \Delta \lambda R_\lambda)^{-1} R_\lambda y \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda + \Delta \lambda \in \sigma(A)$ (т.к. $\exists$ реш-е)

$$R_{A+A} = (E - AA^* R_A)^{-1} R_A \Rightarrow R_{A+A} - R_A = [(E - AA^* R_A)^{-1} - E] R_A$$

Из теории банахов. нр-в известно, что $\|(E - A)^{-1} - E\| \leq \|A\| \cdot \frac{1}{1 - \|A\|}$
 (if $\|A\| < 1$) $\Rightarrow \|R_{A+A} - R_A\| \leq \|AA^* R_A\| \|R_A\| \cdot \frac{1}{1 - \|AA^* R_A\|} \xrightarrow{A \rightarrow 0} 0$ ■

Сл $\sigma(A)$ - открыт. мн-во, а $\sigma(A)$ - замкнутое.

Л (Лемма Гильберта) $\exists A \in L(X \rightarrow X), \exists \mu \in \sigma(A)$.
 Тогда $R_A - R_\mu = (A - \mu) R_A R_\mu = (A - \mu) R_\mu R_A$ слева
 $\neq R_A - R_\mu = (A - \mu) R_A R_\mu$. Действуем справа $A - \mu E \Rightarrow$
 $\Rightarrow E - (A - \mu E) R_\mu = (A - \mu) R_\mu$. Действуем справа $A - \mu E \Rightarrow$
 $\Rightarrow A - \mu E - A + \mu E = (A - \mu) E$ - верное тождество
 Если сначала действовать справа, а потом слева, то получим
 $R_A - R_\mu = (A - \mu) R_\mu R_A$ ■